THÉORIE DES GROUPES. — *Groupes à dualité de Poincaré de dimension* 2. Note (*)
de **Beno Eckmann** et **Peter Linnell,** présentée par Jean-Pierre Serre.

On montre que le premier nombre de Betti d'un groupe à dualité de Poincaré de dimension 2 est > 0. Il en résulte, en vertu d'un théorème d'Eckmann-Müller, que tout groupe à dualité de Poincaré de dimension 2 est isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte (de genre $\geqq 1$).

GROUP THEORY. — Poincaré Duality Groups of Dimension 2.

It is proved that the first Betti number of a Poincaré duality group of dimension 2 is positive. This implies, by a theorem of Eckmann-Müller, that any Poincaré duality group of dimension two is isomorphic to the fundamental group of a closed surface (of positive genus).

1. Introduction. — Dans tout ce qui suit G désigne un groupe vérifiant la dualité de Poincaré de dimension 2 (PD^2-groupe), orientable :

$$H^i(G; A) \cong H_{2-i}(G; A),$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $\mathbb{Z}G$-module A. Pour que G soit un PD^2-groupe orientable il faut et il suffit qu'il soit de type (FP) et que $H^i(G; \mathbb{Z}G)=0$ pour $i \neq 2$, $H^2(G; \mathbb{Z}G)=\mathbb{Z}$ avec G-opération triviale. Les groupes fondamentaux des surfaces compactes (orientables) de genre $\geqq 1$ sont des PD^2-groupes (orientables). Dans Eckmann-Müller [2] la réciproque, pour le cas orientable et non-orientable, est démontrée sous l'hypothèse supplémentaire que le premier nombre de Betti β_1 du groupe est > 0.

2. **Modules projectifs de type fini sur $\mathbb{Z}G$. — Pour un $\mathbb{Z}G$-module M notons rg M le rang du groupe abélien $\mathbb{Z}\otimes_G M$.**

Lemme 1. — *Pour tout $\mathbb{Z}G$-module* $M \neq 0$, *projectif et de type fini, le rang* rg M *est* > 0.

Démonstration. — Soit r_M le « rang de Hattori-Stallings » de M (*voir* [1], p. ex.); c'est une combinaison linéaire finie des classes de conjugaison τ de G :

$$r_M = \Sigma\, r_M(\tau)\, \tau.$$

Notons $r_M(x)$ le coefficient de la classe τ de $x \in G$. Si $r_M(x)$, $x \neq 1$, est différent de 0, l'élément x est conjugué à x^{p^n} pour un nombre premier p et un entier $n > 0$ (d'après Bass [1], théorème 8.1 (*b*)). Comme G est sans torsion, il en résulte que x est contenu dans un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbb{Z}[1/p]$. Or les sous-groupes de G sont soit des PD^2-groupes, soit libres (Strebel [3]).

Ainsi r_M est concentré sur $1 \in G$, d'où rg $M = r_M(1)$. D'après le théorème de Kaplansky (*voir* [1], p. 184) appliqué à la $\mathbb{Z}G$-matrice idempotente correspondant à M, l'hypothèse $M \neq 0$ entraîne $r_M(1) > 0$.

3. Caractéristique d'Euler. — Considérons la résolution projective sur $\mathbb{Z}G$:

$$0 \to P \to (\mathbb{Z}G)^d \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où P est projectif de type fini. En appliquant $\mathrm{Hom}_G(-, \mathbb{Z}G)$ à cette suite et en tenant compte de $H^0(G; \mathbb{Z}G)=H^1(G; \mathbb{Z}G)=0$, $H^2(G; \mathbb{Z}G)=\mathbb{Z}$ on en déduit la suite exacte :

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\gamma} P^* \leftarrow (\mathbb{Z}G)^d \leftarrow \mathbb{Z}G \leftarrow 0, \tag{2}$$

avec $P^*=\mathrm{Hom}_G(P, \mathbb{Z}G)$ projectif de type fini. De (1) et (2) on tire :

$$P^* \otimes IG \cong \mathbb{Z}G \otimes L,$$

où IG est le noyau de l'augmentation ε, et L le noyau de γ. On a donc une surjection $(\mathbb{Z}G)^{d+1} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}G \oplus L$, et par conséquent une surjection $\pi : (\mathbb{Z}G)^{d+1} \twoheadrightarrow P^*$; soit K le noyau de π. Comme K est projectif de type fini et $\neq 0$, on a $\operatorname{rg} K > 0$ en vertu du Lemme 1, donc $\operatorname{rg} P^* \leqq d$.

Pour la caractéristique d'Euler de G la résolution (2) donne :

$$\chi(G) = \operatorname{rg} P^* - d + 1 \leqq 1.$$

D'autre part $\chi(G) = 2 - \beta_1$, d'où $\beta_1 > 0$:

THÉORÈME 2. — *Le premier nombre de Betti d'un* PD^2-*groupe orientable est* > 0.

Remarque 3. — D'après [2], p. 511 il s'ensuit que le même résultat est valable pour un PD^2-groupe non-orientable.

En vertu du résultat principal de [2] on a finalement le :

THÉORÈME 4. — *Un groupe* G *vérifie la dualité de Poincaré de dimension* 2 *si et seulement s'il est isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte* (*de genre* $\geqq 1$).

(*) Remise le 4 octobre 1982.

[1] H. BASS, *Inventiones Math.*, 35, 1976, p. 155-196.
[2] B. ECKMANN et H. MÜLLER, *Comment. Math. Helvetici*, 55, 1980, p. 510-520.
[3] R. STREBEL, *Comment. Math. Helvetici*, 52, 1973, p. 317-324.

Forschungsinstitut für Mathematik, E.T.H., *Zurich, Suisse*,
Dept. of Mathematics, U.M.I.S.T., *Manchester, Angleterre.*